

数列の漸化式問題において特性方程式を使用する背景。

【第一部：二項間漸化式編】

問題： $a_{n+1} = pa_n + q$, (p, q, a_1 は定数として与えられている)という条件の下で、 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

二項間漸化式と呼ばれるこうした問題は、以下のようにして解くことができる。

- ① $a_{n+1} = a_n = x$ と置き換えた一次方程式(特性方程式)の解を求める。
- ② $a_{n+1} - x = p(a_n - x)$ の形にして、更に $a_1 - x$ も求める。
- ③ $\{a_n - x\}$ は初項 $a_1 - x$ 、公比 p の等比数列となるので、等比数列の一般項の公式を用いて $\{a_n - x\}$ の一般項は求められる。
- ④ 求めた一般項に x を加えることで、 $\{a_n\}$ の一般項が求められる。

ところでなぜ、特性方程式を解くことが、漸化式の一般項を求めることにつながるのだろうか？

それを解説するために、特性方程式を前提とすることなく、どのようにすれば一般項を求められるかということを考えていこう。

最も基本的な数列は、等差数列か等比数列である。このいずれかに還元することができれば、一般項を求めることはできる。二項間漸化式には a_n に p という係数が付いているので、等差数列の形は望み薄である。

しかし、漸化式に何らかの操作を加えることで、 $a_{n+1} - x = y(a_n - x)$ という形にすることができれば、 $\{a_n - x\}$ は等比数列とみなすことができるので、**等比数列の公式を利用できる**ことになる。

それでは、 $a_{n+1} - x = y(a_n - x)$ の x, y は、どのようにすれば求められるのか？

これを求めるためには、 $a_{n+1} - x = y(a_n - x)$ を a_{n+1} について解いて、問題で与えられている漸化式と係数比較すればよい。これを解くと、 $a_{n+1} = ya_n + x(1 - y)$ となるから、係数比較すると、
$$\begin{cases} y = p \\ x(1 - y) = q \end{cases}$$
となる必要がある。この連立方程式を解くと、
$$\begin{cases} x = q/(1 - p) \\ y = p \end{cases}$$
となる。

これで、 x, y をどのように定めればよいかがわかったので、等比数列の問題に還元可能となった。

はっきり言おう。**この x, y を公式として覚えてしまうのであれば、それで十分である。**

しかし、 y の方はすぐにわかるが、 x の方は多少なりとも煩雑な形をしており、間違えて覚えてしまう可能性もある。そこで、間違える可能性の低い方法はないのだろうか？

ここで、 $a_{n+1} = pa_n + q$ を $a_{n+1} = a_n = x$ と置き換えた一次方程式 $x = px + q$ を x について解いてみる。すると、 $x = q/(1-p)$ となるため、先程求めた x と同じになってしまう。

つまり、特性方程式を解けば、公式を覚えなくても x が求められるのである。偶然一致してしまったのだが、こちらの方が $x = q/(1-p)$ を公式として覚えるよりも(たぶん)間違えにくいだろう…ということで、特性方程式を用いた解法が推奨されているわけである。

【第二部:三項間漸化式編】

問題: $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$, (p, q, a_1, a_2 は定数として与えられている)という条件の下で、 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

三項間漸化式と呼ばれるこうした問題は、次のようにして解いていく。

- ① $a_{n+2} = x^2, a_{n+1} = x, a_n = 1$ と置き換えた二次方程式(特性方程式)を解く。
- ② 特性方程式の解を α, β として、 $\begin{cases} a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n) \\ a_{n+2} - \beta a_{n+1} = \alpha(a_{n+1} - \beta a_n) \end{cases}$ の形にして、更に $\begin{cases} a_2 - \alpha a_1 \\ a_2 - \beta a_1 \end{cases}$ も求める。
- ③ $\{a_{n+1} - \alpha a_n\}$ は初項 $a_2 - \alpha a_1$ 、公比 β の等比数列、 $\{a_{n+1} - \beta a_n\}$ は初項 $a_2 - \beta a_1$ 、公比 α の等比数列となるので、等比数列の一般項の公式を用いて一般項が求められる。
- ④ この後の処理は、 $\alpha \neq \beta$ の場合と $\alpha = \beta$ (重解)の場合で異なる。

三項間漸化式で特性方程式を用いる理由も、**等比数列の形にしたい**という目的を実現する上で、これを用いることが効果的だということに尽きる。

$a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n)$ あるいは $a_{n+2} - \beta a_{n+1} = \alpha(a_{n+1} - \beta a_n)$ の形にするために、どのように α, β を定めるべきかを考えるために、これらを展開して右辺が0になる形にして係数比較をすると、 $\begin{cases} p = -(\alpha + \beta) \\ q = \alpha\beta \end{cases}$ という形になる。これは二次方程式の解と係数の関係と偶然ながら一致してしまうわけだから、 $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$ を $a_{n+2} = x^2, a_{n+1} = x, a_n = 1$ に置き換えた $x^2 + px + q = 0$ という二次方程式の解を α, β として定めればよいということなのである。