

常用対数を用いた最高位の数字の求め方の背景。

a と b は自然数として、 a^b の最高位の数字を、 $\log_{10} 2$ や $\log_{10} 3$ の数値が与えられている条件の下で求める問題の解き方の背景を説明する。

具体例を伴った方がわかりやすいと思うので、 6^{20} の最高位の数を求める問題を具体的に解きながら解説していく。 $\log_{10} 2 = 0.3010$ 、 $\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。

① $\log_{10} a^b$ の数値 (= k とする) を求める。

対数計算の公式を用いて、計算を行う。

$$\text{具体例: } \log_{10} 6^{20} = 20 \log_{10} 6 = 20(\log_{10} 2 + \log_{10} 3) = 20 * (0.3010 + 0.4771) = 15.562$$

② $\log_{10} a^b = k$ から、 $a^b = 10^k$ であることを導く。

これは、対数の定義によって正当化される。

$$\text{具体例: } \log_{10} 6^{20} = 15.562 \text{ より、} 6^{20} = 10^{15.562}$$

③ $a^b = 10^k = 10^{(0 \text{ 以上 } 1 \text{ 未満の正の小数})} \cdot 10^{(\text{自然数})}$ の形にする。

これは、指数の基本公式によって正当化される。

$$\text{具体例: } 6^{20} = 10^{15.562} = 10^{0.562} \cdot 10^{15}$$

※どうしてこのような操作を行うのか？ 次のことを確認しておくことが大切である。

以下では、焦点となっている「0 以上 1 未満の正の小数」を r とおく。

〔Ⅰ〕 ある数に $10^{(\text{自然数})}$ をかけても最高位の数字が変化しないことは明らかである。それ故に、

$a^b = 10^r \cdot 10^{(\text{自然数})}$ の最高位の数字を求めるためには、 10^r の最高位の数字を求めればよい。

〔Ⅱ〕 $y = 10^x$ は単調増加する (x が増加すれば y も増加する) ため、 x の大小関係はそのまま 10^x の大小関係に置き換えられる。それを踏まえると、 $0 \leq r < 1$ から、 $1(10^0) \leq 10^r < 10(10^1)$ が導かれる。つまり、 10^r の整数部分は 1 以上 9 以下なのであるが、一般に最高位の数字は 1 以上 9 以下の自然数だから、 10^r の最高位の数字とは、 10^r の整数部分のことである。**10 の「0 以上 1 未満の正の小数」乗を分離したのは、最高位の数字と整数部分を一致させるためだったのである！**

〔Ⅲ〕 以上の〔Ⅰ〕と〔Ⅱ〕より、 10^r の整数部分が、求めるべき a^b の最高位の数字であることがわかる。 10^r の整数部分とは、 $n \leq 10^r < n + 1$ を満たす自然数 n のことだから、これを求めればよい。

- ④ $y = \log_{10} x$ は単調増加するから、 $n \leq 10^r < n+1$ が成り立てば、 $\log_{10} n \leq r < \log_{10}(n+1)$ も成り立つ。これを踏まえて、 $\log_{10} n \leq r < \log_{10}(n+1)$ を満たす自然数 n を、与えられた常用対数の数値を用いて求める。

r の整数部分が1以上9以下であることは〔Ⅱ〕で確認した通りであるから、 n は1から9までのいずれかの自然数になる。

ところで、真数が1から10までの自然数である常用対数は、7を除けば、全て $\log_{10} 2$ や $\log_{10} 3$ が与えられれば求めることができる。具体的には、以下ようになる。

常用対数	数値
$\log_{10} 1$	0
$\log_{10} 2$	0.3010
$\log_{10} 3$	0.4771
$\log_{10} 4$	$\log_{10} 2^2 = 2 \log_{10} 2 = 2 * 0.3010 = 0.6020$
$\log_{10} 5$	$\log_{10}(\frac{10}{2}) = \log_{10} 10 - \log_{10} 2 = 1 - 0.3010 = 0.6990$
$\log_{10} 6$	$\log_{10}(2 * 3) = \log_{10} 2 + \log_{10} 3 = 0.3010 + 0.4771 = 0.7781$
$\log_{10} 7$	計算不能
$\log_{10} 8$	$\log_{10} 2^3 = 3 \log_{10} 2 = 3 * 0.3010 = 0.9030$
$\log_{10} 9$	$\log_{10} 3^2 = 2 \log_{10} 3 = 2 * 0.4771 = 0.9542$
$\log_{10} 10$	1

具体例： $r = 0.562$ であるから、 $0.4771(\log_{10} 3) \leq r < 0.6020(\log_{10} 4)$ 。従って、 $n = 3$ である。

この $n = 3$ が 10^r の整数部分であり、〔Ⅲ〕より求めるべき a^b の最高位の数字でもある。