

連立方程式が解ける条件とは？

まずは、1次方程式 $ax = b$ を解いてみて欲しい。当然、 $x = b/a$ となる。

しかしながら、この解にはある前提が隠されている。それは $a \neq 0$ だという前提である。もし $a = 0$ であれば、0で割ることはできないので、この1次方程式を解くことはできないのである。0で割ることができないということは、0には逆数が存在しないという言い方もできる。方程式 $ax = b$ を解けるためには、 a の逆数が存在することが必要十分条件なのである。

それでは今度は、2元1次連立方程式 $\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$ を解いてみて欲しい。加減法でも代入法でもよいので解いてみると、 $\begin{cases} x = (ce - bf)/(ae - bd) \\ y = (af - cd)/(ae - bd) \end{cases}$ という解を導くことができる。これが2元1次連立方程式の一般解である。

しかし、1次方程式の場合と同じように考えると、この連立方程式が解けるためには、解の分母部分が0になってはならない。つまり、 $ae - bd \neq 0$ であることが前提になっている。 $ae - bd = 0$ であれば、連立方程式を解くことはできないのである。

この $ae - bd$ は、大学数学で習う(一昔前までは高校数学で習ったけど)行列論における、2次正方行列の行列式と呼ばれるものである。この行列式が0にならないことは、2次正方行列の逆行列(逆数の2次元バージョンみたいなもの)が存在するための必要十分条件であり、また2元1次連立方程式がただ一つの解を持つための必要十分条件なのである。

上記の考え方は、文字と式の数が増えようが3つになっても4つになっても、それ以上になっても通用する。一般に、 n 次正方行列の行列式というものが定義可能で(多少複雑な定義だが)、その行列式が0にならないことが、 n 次正方行列の逆行列が存在するための必要十分条件であり、更に n 元1次連立方程式がただ一つの解を持つための必要十分条件なのである。

詳しくは、大学の線形代数学の授業で学ぶことになるはずである。