

直線 $l: ax + by + c = 0$ と直線 $m: dx + ey + f = 0$ の交点 $P(\alpha, \beta)$ を通る任意の直線(但し、 m は除く)は、 $ax + by + c + k(dx + ey + f) = 0$ として表すことができることの証明。

以下では、4つの段階に分けて証明を進めていくが、実はこの命題には暗黙の前提がある。

【根本前提】 $ae = bd$ ではない。 $\Rightarrow$ ここから、以下の諸前提が派生する。

〔派生前提Ⅰ〕 $a = b = 0$ ではない。(もし $a = b = 0$ なら、 $ae = bd$ となって根本前提に矛盾するため)

※この派生前提は、 l の式が直線を表すことを保証している。

〔派生前提Ⅱ〕 $d = e = 0$ ではない。(もし $d = e = 0$ なら、 $ae = bd$ となって根本前提に矛盾するため)

※この派生前提は、 m の式が直線を表すことを保証している。

〔派生前提Ⅲ〕 $a = d = 0$ ではない。(もし $a = d = 0$ なら、 $ae = bd$ となって根本前提に矛盾するため)

※この派生前提が成り立たない場合、 l と m は共に x 軸に平行になるので、2直線が平行になって交点が存在しないか、あるいは2直線が一致して交点が無限に存在するかのいずれかとなる。そうならないことが保証されている。

〔派生前提Ⅳ〕 $b = e = 0$ ではない。(もし $b = e = 0$ なら、 $ae = bd$ となって根本前提に矛盾するため)

※この派生前提が成り立たない場合、 l と m は共に y 軸に平行になるので、2直線が平行になって交点が存在しないか、あるいは2直線が一致して交点が無限に存在するかのいずれかとなる。そうならないことが保証されている。

〔派生前提Ⅴ〕 $-a/b = -d/e$ ではない。(根本前提の両辺を $-be$ で割ることによって導かれる)

※この派生前提が成り立たない場合、 l と m の傾きが同じになるため、2直線は平行になって交点が存在しないか、2直線が一致して交点が無限にあるかのいずれかとなる。そうならないことが保証されている。

※派生諸前提から想像できると思うが、根本前提とは、 l と m にただ一つの交点が存在するための条件なのである。

ところで、なぜ $ae \neq bd$ である必要があるのだろうか？

ここで、2直線の交点の座標が2直線の式の連立方程式を解くことで導けるということを、思い出して欲しい。しかし逆に、もし連立方程式が解けなければ、(ただ一つの)交点は存在しないのである。2直線の式の連立方程式が解けるということは、グラフ上の2直線の交点が存在することの代数的表現に他ならない。

そして $ae \neq bd$ は、2直線の式の連立方程式が解けるための必要十分条件なのである。この点の詳細な説明は、『連立方程式が解ける条件とは？』という別資料を参照のこと。

① $ax + by + c + k(dx + ey + f) = 0$ が直線を表すことの証明。

与式は、 $(a + kd)x + (b + ke)y + (c + kf) = 0$ と変形することができる。 $A = a + kd$ 、 $B = b + ke$ 、 $C = c + kf$ とおけば、 $Ax + By + C = 0$ となる。素朴に考えれば、これが直線を表すことは明らかである。

※普通の高校生であれば、この素朴な理解で十分だが、厳密には $A = B = 0$ にならないことを証明しなければ、これが直線を表すと断定することはできない。より高度な理解を目指す人のために、 $A = B = 0$ にならないことを証明する。

$A = B = 0$ になると仮定して、背理法による証明を行う。

仮定より、 $a + kd = b + ke = 0$ である。場合分けを行う。

〔ⅰ〕 $d = 0$ の場合…この条件を仮定の $a + kd = 0$ に代入すると、 $a = 0$ も導かれるので、派生前提Ⅲに矛盾する。

〔ⅱ〕 $e = 0$ の場合…この条件を仮定の $b + ke = 0$ に代入すると、 $b = 0$ も導かれるので、派生前提Ⅳに矛盾する。

〔ⅲ〕 $d \neq 0$ かつ $e \neq 0$ の場合…仮定から、 $k = -a/d = -b/e$ となる。これを変形すると $ae = bd$ となるが、これは根本前提に矛盾する。

〔ⅰ〕、〔ⅱ〕、〔ⅲ〕で全ての可能性は尽くされている。全ての場合で $a + kd = b + ke = 0$ 、つまり $A = B = 0$ にならないことが、背理法によって証明された。【証明了】

※①の結果を踏まえて、 $ax + by + c + k(dx + ey + f) = 0$ のことを、以下では直線nと呼ぶ。

② 直線n: $ax + by + c + k(dx + ey + f) = 0$ が交点P(α, β)を通ることの証明。

交点Pは直線l上の点だから、 $a\alpha + b\beta + c = 0$ 。

交点Pは直線m上の点だから、 $d\alpha + e\beta + c = 0$ 。

よって、 $a\alpha + b\beta + c + k(d\alpha + e\beta + c) = 0 + k \cdot 0 = 0$ 。

これは、 $(x, y) = (\alpha, \beta)$ が $ax + by + c + k(dx + ey + f) = 0$ を満たすことを意味しており、それは直線nが交点P(α, β)を通るということに他ならない。【証明完了】

※①と②で、直線nが交点Pを通る直線であることまでは証明されたが、mを除く任意の直線を表すことができることはまだ示されていない。それを証明することが③の段階である。

③ 直線m上にないPと異なる任意の点Q(γ, δ)を取ると、kを適当に選ぶことによって、直線PQを直線nの形で表すことができることの証明。

点Qはm上にないことから、 $d\gamma + e\delta + f \neq 0$ である。

これを踏まえて、 $k = -(a\gamma + b\delta + c)/(d\gamma + e\delta + f)$ という定数を取り、

更に変形すると $a\gamma + b\delta + c + k(d\gamma + e\delta + f) = 0$ となる。

これは、 $(x, y) = (\gamma, \delta)$ が $ax + by + c + k(dx + ey + f) = 0$ を満たすことを意味しており、それは直線nが交点Q(γ, δ)を通るということである。

②の結果と合わせて考えると、直線nが点Pと点Qを共に通ることが明らかになった。直線nは直線PQに他ならないことがわかる。【証明完了】

④ ③の結果、 $ax + by + c + k(dx + ey + f) = 0$ は、点Pと直線m上にない任意の点Qを結ぶ直線を表すことがわかった。これは、点Pを通るm以外の任意の直線を表している。【全証明完了】

※「P と任意の点Qと結ぶ直線が、点Pを通る任意の直線を表す」という主張がすんなりと理解できない場合は、引きたい直線を先に選んで、その上にある適当な点をQとして選べばよいと考えて欲しい。

※尚、直線n: $ax + by + c + k(dx + ey + f) = 0$ が直線mを表すことはできない理由は、以下の通りである。

③における点Q(γ, δ)をm上のPと異なる点であるとする。この場合の直線PQが、直線mに他ならない。

この時、Qがm上にあることから $d\gamma + e\delta + f = 0$ であり、Pと異なる点であるためにはl上の点ではあり得ないので $a\gamma + b\delta + c \neq 0$ となる。結果、 $a\gamma + b\delta + c + k(d\gamma + e\delta + f) = (0 \text{でない数}) + k \cdot 0 = (0 \text{でない数})$ となるので、直線nは満たし得ないことがわかる。つまり、この場合の直線PQすなわち直線mは、直線nの形で表すことができない。

直線mを表現するためには、 $h(ax + by + c) + k(dx + ey + f) = 0$ というような式を一般形として採用する必要がある。この形であれば、 $h = 0, k = 1$ とすることで、直線mをも表すことが可能になる。