2021年度　大学共通テスト（1次日程）【数学Ⅱ・数学B】解説

第5問

（1）正五角形の内角の一つである∠$A_1B_1C_1$の大きさは、180°×３÷５＝108°。
△$A_1B_1C_1$は A_1B_1＝B_1C_1の二等辺三角形なので、底角である∠$A_1C_1B_1$の大きさは、（180°－108°）÷2＝36°。

∠$C_1A_1A_2$の大きさが∠$A_1C_1B_1$の大きさに等しくなることは解答欄が共通していることから明らかですが、一応根拠を述べておきましょう。∠OA_1B_1は正五角形の内角なので、108°。∠OA_1A_2と∠$B_1A_1C_1$は共に、正五角形の内角を頂角とする二等辺三角形の底角なので、36°。よって、

∠$C_1A_1A_2$＝∠OA_1B_1－∠OA_1A_2－∠$B_1A_1C_1$＝108°－36°－36°＝36°

$\overrightarrow{A_1A_2}$と$\overrightarrow{B_1C_1}$は同じ向きで、大きさの比がa：1なので、$\overrightarrow{A_1A_2}=a\overrightarrow{B_1C_1}$です。

また、

$$\overrightarrow{B_1C_1}=\overrightarrow{B_1A_2}+\overrightarrow{A_2O}+\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{A_1C_1}=-a\overrightarrow{OA_1}-\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_1}+a\overrightarrow{OA_2}$$
$$=-(a-1)\overrightarrow{OA_1}+(a-1)\overrightarrow{OA_2}=(a-1)(\overrightarrow{OA_2}-\overrightarrow{OA_1})$$

となります。

（2）（1）で考察した図形が、正十二面体の一つの面になっていることに注意すると、

$$\left|\overrightarrow{OA_2}-\overrightarrow{OA_1}\right|^2=\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right|^2=a^2=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2=\frac{6+2\sqrt{5}}{4}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

また、正五角形の一辺の長さが1であることに注意すれば、

$$\left|\overrightarrow{OA_2}-\overrightarrow{OA_1}\right|^2=\left|\overrightarrow{OA_2}\right|^2+2\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OA_2}+\left|\overrightarrow{OA_1}\right|^2=1^2-2\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OA_2}+1^2$$
$$=2-2\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OA_2}$$

になるので、

$$2-2\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OA_2}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

これを解いて、

$$\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OA_2}=\frac{1-\sqrt{5}}{4}$$

となります。

更に与えられている計算結果を利用することで、

$$\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OB_2}=\overrightarrow{OA_1}\cdot\left(\overrightarrow{OA_3}+a\overrightarrow{OA_2}\right)=\overrightarrow{OA_3}\cdot\overrightarrow{OA_1}+a\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OA_2}$$
$$=\frac{1-\sqrt{5}}{4}+\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)=\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)=\frac{-2-2\sqrt{5}}{8}$$
$$=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}$$
であることがわかります。また、
$$\overrightarrow{OB_1}\cdot\overrightarrow{OB_2}=\left(\overrightarrow{OA_2}+a\overrightarrow{OA_1}\right)\left(\overrightarrow{OA_3}+a\overrightarrow{OA_2}\right)$$
$$=\overrightarrow{OA_2}\cdot\overrightarrow{OA_3}+a\left|\overrightarrow{OA_2}\right|^2+a\overrightarrow{OA_3}\cdot\overrightarrow{OA_1}+a^2\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OA_2}$$
$$=a\cdot 1^2+(a^2+a+1)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)$$
ここで、（1）で$\frac{1}{a}=a-1$が成り立っていたことに注意すると、$a^2=a+1$。よって、
$$\overrightarrow{OB_1}\cdot\overrightarrow{OB_2}=a\cdot 1^2+(a^2+a+1)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)=a+2(a+1)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)$$
$$=\frac{1+\sqrt{5}}{2}+2\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)=\frac{1+\sqrt{5}}{2}+\frac{-2-2\sqrt{5}}{4}$$
$$=\frac{1+\sqrt{5}}{2}+\frac{-1-\sqrt{5}}{2}=0$$
であることがわかります。

最後の問題は、
$$\left|\overrightarrow{OB_1}\right|=\left|\overrightarrow{B_1D}\right|=\left|\overrightarrow{DB_2}\right|=\left|\overrightarrow{B_1O}\right|=a$$
なので、四角形OB_1DB_2はひし形としての特徴を備えています。更に、$\overrightarrow{OB_1}\cdot\overrightarrow{OB_2}=0$という先程得た結果から、$\overrightarrow{OB_1}\perp\overrightarrow{OB_2}$であることが分かります。になります。ひし形である$OB_1DB_2$の一つの角が90°なので、残りの3つの角も全て90°です。

全ての角が90°のひし形は、正方形です。