

2021年度 大学共通テスト(1次日程)【数学Ⅱ・数学B】解説

第4問

(1) a_n 、 a_{n+1} 、 b_n を求める問題は、等差数列や等比数列の一般項に初項の数字を当てはめるだけです。

次に、誘導に従って、①の両辺を b_n で割ると、

$$\left(\frac{b_{n+1}}{b_n}\right)a_n - 2\left(\frac{b_n}{b_n}\right)a_{n+1} + 3\left(\frac{b_{n+1}}{b_n}\right) = 0$$

$\frac{b_{n+1}}{b_n} = r$ 、 $\frac{b_n}{b_n} = 1$ なので、 $ra_n - 2a_{n+1} + 3r = 0$ 。これを整理して $2a_{n+1} = r(a_n + 3)$

が得られます。

誘導通り、④に②と③を代入すると、

$$2(3 + np) = r\{3 + (n - 1)p + 3\}$$

この np (pn)の項を左辺に、それ以外を右辺に移項して整理すると、

$$(r - 2)pn = r(p - 6) + 6$$

これが全ての n について成り立つためには、 n の恒等式でなければならないので、

$$\begin{cases} (r - 2)p = 0 \\ r(p - 6) + 6 = 0 \end{cases}$$

$p \neq 0$ という制約の下でこの連立方程式を解くと、 $r = 2$ 、 $p = 3$ が導かれます。

(2) (1)で p や r の数字が確定したので、 a_n と b_n は初項も公差や公比も確定しています。等差数列や等比数列の和の公式にそれらの数値を代入して整理すれば、答えを導くことができます。

(3) ⑥式を c_{n+1} について解けば、

$$c_{n+1} = \frac{4a_{n+1}}{a_n + 3}c_n$$

が得られます。 $a_n > 0$ なので、 $a_n + 3 > 0$ になるため、0で割るという禁止事項には該当しないというのが、一応の注意点です。

ところで、(1)で求めた $p = 3$ を②や③に代入すると、 $a_n = 3n$ 、 $a_{n+1} = 3(n + 1)$ であることがわかるので、それを上の式に代入すると、

$$c_{n+1} = \frac{4 \cdot 3(n + 1)}{3n + 3}c_n = \frac{4 \cdot 3(n + 1)}{3(n + 1)}c_n = 4c_n$$

となるので、 c_n は公比が1より大きい4の等比数列です。

(4) ⑦式を d_{n+1} について解けば、

$$d_{n+1} = \frac{b_{n+1}}{qb_n}(d_n + u)$$

となります。 $\frac{b_{n+1}}{b_n} = r = 2$ なので、

$$d_{n+1} = \frac{2}{q}(d_n + u)$$

と表されます。これが、公比が0より大きく1より小さい等比数列になるためには、 $u =$

0になる必要があります、更に $0 < \frac{2}{q} < 1$ になる必要があります。 $0 < \frac{2}{q}$ から $q > 0$ であること

になり、これを踏まえて $\frac{2}{q} < 1$ を解くと $q > 2$ という条件が出てきます。