

2021年度 大学共通テスト(1次日程)【数学Ⅱ・数学B】解説

第2問

(1) ①と②のどちらに $x=0$ を代入しても、 $y=3$ が得られます。これが y 軸との交点の y 座標です。

①を微分すると $y' = 6x + 2$ 、②を微分すると $y' = 4x + 2$ 。どちらに $x=0$ を代入しても $y' = 2$ となり、これが $x=0$ における接線の傾きとなります。(0, 3)を通ることから、接線の方程式は共に、 $y = 2x + 3$ です。

結局、1次の項の係数が2、定数項が3であれば、①や②と同じ結果になります。選択肢の中でその要件を満たしているのは、④の $y = -x^2 + 2x + 3$ です。

次の問題は、ここまでの一般化です。 $y = ax^2 + bx + c$ に $x=0$ を代入すると、 $y=c$ が得られます。微分すると $y' = 2ax + b$ になるので、 $x=0$ を代入すると $y' = b$ となり、これが $x=0$ における接線の傾きとなります。よって(0, c)における接線の方程式は、 $y = bx + c$ です。これに $y=0$ を代入した $x = -\frac{c}{b}$ が、接線と x 軸の交点です。

曲線と接線の交点の x 座標は $x=0$ なので、曲線と接線と $x = -\frac{c}{b}$ で囲まれた面積は、 $b > 0$ 、 $c > 0$ から $-\frac{c}{b} < 0$ 、 $a > 0$ より曲線の方が接線の上側に来ることに注意すると、

$$S = \int_{-\frac{c}{b}}^0 \{(ax^2 + bx + c) - (bx + c)\} dx = \left[\frac{ax^3}{3} \right]_{-\frac{c}{b}}^0 = -\frac{a}{3} \left(-\frac{c}{b} \right)^3 = \frac{ac^3}{3b^3}$$

ここに $a=1$ を代入して整理すると $c^3 - 3Sb^3 = 0$ 。左辺を因数分解すると、

$$(c - \sqrt[3]{3Sb})(c^2 + \sqrt[3]{3Sb}c + b^2) = 0$$

になりますが、 b と c と S が全て正であるため、 $c^2 + \sqrt[3]{3Sb}c + b^2 > 0$ になるため、 $c - \sqrt[3]{3Sb} = 0$ 、つまり $c = \sqrt[3]{3Sb}$ のみが成り立ちます。 b と c は比例することがわかります。

(2) ①と②にのどちらに $x=0$ を代入しても、 $y=5$ が得られます。これが y 軸との交点の y 座標です。

④でも⑤でも⑥でも、1次の項の係数が3であるため、導関数の定数項も3になります。従って(0, 5)における接線の傾きは3となり、接線の方程式は全て、 $y = 3x + 5$ です。

次の問題は、ここまでの一般化です。 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ に $x=0$ を代入すると、 $y=d$ が得られます。微分すると $y' = 3ax^2 + 2bx + c$ になるので、 $x=0$ を代入すると $y' = c$ となり、これが $x=0$ における接線の傾きとなります。よって $(0, d)$ における接線の方程式は、 $y = cx + d$ です。

(2)のここまでは、(1)で2次関数について行ったことを3次関数に拡張しただけですが、最後の問題には独自性があります。

$$h(x) = (ax^3 + bx^2 + cx + d) - (cx + d) = ax^3 + bx^2$$

となります。 $h'(x) = 3ax^2 + 2bx$ なので、これを0とおくと $x = -\frac{2b}{3a}, 0$ 。これが極値の x

座標になります。 a や b は正なので $-\frac{2b}{3a} < 0$ となり、 $x = -\frac{2b}{3a}$ で極大値、 $x = 0$ で極小値

を取ります。これに合うグラフは②だけです。

$f(x)$ と $g(x)$ の共有点の x 座標は $h(x) = f(x) - g(x) = 0$ の解に他ならず、 $h(x) = ax^3 + bx^2$ だったので、それらは $x = -\frac{b}{a}, 0$ です。先に求めたグラフの概形を利用すれば、この間の範囲では常に $h(x) \geq 0$ なので、 $|f(x) - g(x)| = |f(x)|$ の絶対値は外して構いません。グラフを利用すれば、この範囲での $f(x)$ の最大値は極大値と一致すること

とがわかるので、その場合の x 座標である $x = -\frac{2b}{3a}$ で最大になります。

グラフを上手に使えば、すぐに答えられる問題です。絶対値に惑わされて、時間をかけないようにして欲しいです。