

2021年度 大学共通テスト(1次日程) 【数学Ⅱ・数学B】解説

第1問

〔1〕

(1) $0 \leq x < 2\pi$ の間で $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 、 $\cos x = \frac{1}{2}$ になるのは $x = \frac{\pi}{3}$ の時であることは、三角関数の基本知識として覚えておきましょう。

三角関数の合成ができれば、 $y = 2 \sin(\theta + \frac{\pi}{3})$ であることはわかるはずです。

$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ から、 $\frac{\pi}{3} \leq \theta + \frac{\pi}{3} \leq \frac{5\pi}{6}$ という定義域が得られるので、この範囲での $\sin(\theta + \frac{\pi}{3})$ の最大値は $\theta + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$ のとき、つまり $\theta = \frac{\pi}{6}$ のときに、 $\sin(\theta + \frac{\pi}{3}) = 1$ です。従って、 y の最大値は $2 \cdot 1 = 2$ となります。

(2)

(i) $p=0$ のとき、 $y = \sin \theta$ となるので、 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲における最大値は $\theta = \frac{\pi}{2}$ のときの1です。

(ii) $p>0$ のとき、高校で一般的に教えられる $\sin$ による合成ではなく、 $\cos$ による合成をさせて、最大値を求めさせようとしています。なぜこのようにさせたのか、出題者の意図を推測したくもなりますが、そんなことを詮索しても問題を解くことに役立つわけでもないので、ともかく誘導に従っていきましょう。

加法定理の、 $\cos(\theta - \alpha) = \cos \theta \cos \alpha + \sin \theta \sin \alpha$ が与えられています。問題文をみれば、左辺を何倍かしなければならないはずなので、両辺を k 倍して少し整理してみると、 $(k \sin \alpha) \sin \theta + (k \cos \alpha) \cos \theta = k \cos(\theta - \alpha)$ が得られます。この左辺が $y = \sin \theta + p \cos \theta$ に一致するためには、 $\sin \alpha = \frac{1}{k}$ 、 $\cos \alpha = \frac{p}{k}$ にしなければいけません。が、 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ の関係があるので、 $k^2 = 1 + p^2$ でなければなりません。 $k>0$ であることが問題でも求められていますから、 $k = \sqrt{1 + p^2}$ となります。この k を先程の $\sin \alpha$ や $\cos \alpha$ の式に代入して、 $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}$ 、 $\cos \alpha = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$ が得られます。

$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ かであり、また $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ でもあるので、 $-\frac{\pi}{2} < \theta - \alpha < \frac{\pi}{2}$ です。この範囲で

は $\theta - \alpha = 0$ 、つまり $\theta = \alpha$ において、 $\cos(\theta - \alpha)$ は最大値 1 を取ります。このとき、 $y = \sqrt{1+p^2} \cos(\theta - \alpha)$ の最大値は、 $\sqrt{1+p^2}$ です。

(ii) $p < 0$ のときは、 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲で $\cos \theta$ は減少し続けることに注目しましょう。

従って、負の数である p をかけた $p \cos \theta$ は増加し続けます。 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲では $\sin \theta$ も増加し続けます。よって、両者の和である $y = \sin \theta + p \cos \theta$ も増加し続けます。そのため、 θ の最大値である $\frac{\pi}{2}$ で y は最大値 $y = \sin \frac{\pi}{2} + p \cos \frac{\pi}{2} = 1 + p \cdot 0 = 1$ を取ります。

[2]

(1) $f(0)$ 及び $g(0)$ は、 $f(x)$ と $g(x)$ のそれぞれに $x=0$ を代入して計算します。

相加相乗平均を用いると、 $f(x) = \frac{2^x + 2^{-x}}{2} \geq \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2^x \cdot 2^{-x}} = \sqrt{2^0} = \sqrt{1} = 1$ となるので、 $f(x)$ の最小値は 1 です。等号成立は $2^x = 2^{-x}$ となる場合であり、このとき $x=0$ です。

$g(x) = \frac{2^x - 2^{-x}}{2} = -2$ は、 $t = 2^x$ において $t^2 + 4t - 1 = 0$ を解くと、 $t = -2 \pm \sqrt{5}$ となりますが、 $t = 2^x > 0$ であるため、 $t = -2 - \sqrt{5} < 0$ は不適。従って、 $t = 2^x = \sqrt{5} - 2$ となります。ここから、 $x = \log_2(\sqrt{5} - 2)$ が導かれます。

(2) それぞれ代入して計算していけば、おのずから答えが導かれます。

$$f(-x) = \frac{2^{-x} + 2^x}{2} = \frac{2^x + 2^{-x}}{2} = f(x)$$

$$g(-x) = \frac{2^{-x} - 2^x}{2} = -\frac{2^x - 2^{-x}}{2} = -g(x)$$

$$\begin{aligned} \{f(x)\}^2 - \{g(x)\}^2 &= \left(\frac{2^x + 2^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{2^x - 2^{-x}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{(2^{2x} + 2 + 2^{-2x}) - (2^{2x} - 2 + 2^{-2x})}{4} = \frac{4}{4} = 1 \end{aligned}$$

$$g(2x) = \frac{2^{2x} - 2^{-2x}}{2} = 2 \cdot \left(\frac{2^x + 2^{-x}}{2}\right) \left(\frac{2^x - 2^{-x}}{2}\right) = 2f(x)g(x)$$

となります。

(3)問題文で「(1)、(2)で示されたことのいくつかを利用すると…三つは成り立たない」と言われているので、その誘導に従っていきましょう。

実際にそうであることを、 $\alpha = x$ 、 $\beta = x$ を代入した結果で、確認しましょう。

式(A)について。(1)の結果より、左辺は $f(x-x) = f(0) = 1$ 。一方の右辺は、(2)の結果を利用すると、 $f(x)g(x) + f(x)g(x) = 2f(x)g(x) = 2g(2x)$ となりますが、 $x=0$ の場合を考えると、(1)の結果から $2g(2x) = 2g(0) = 2 \cdot 0 = 0$ となって、左辺と一致しません。よって、式(A)は必ずしも成り立たないことがわかります。

式(B)は実のところ正しいので、ここでは飛ばします。

式(C)について。(1)の結果より、左辺は $g(x-x) = g(0) = 0$ 。一方の右辺は、 $\{f(x)\}^2 + \{g(x)\}^2$ となりますが、 $x=0$ の場合を考えると、(1)の結果から $\{f(0)\}^2 + \{g(0)\}^2 = 1^2 + 0^2 = 1$ となるので、左辺と一致しません。よって、式(C)は必ずしも成り立たないことがわかります。

式(D)については、先に右辺から考えると $f(x)g(x) - f(x)g(x) = 0$ になります。

一方の左辺には $\alpha = \beta = x/2$ を代入した方が便利です。すると $g\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = g(x)$ ですが、(1)の結果より、 $g(x) = -2$ となる x が存在していることがわかるので、この場合には右辺と一致しません。

以上で、(A)、(C)、(D)は一般に成り立たないことがわかりました。残った式(B)は常に成り立ちます。解答する際に求められているわけではありませんが、一応最後にそのことを確認しておきましょう。

$$\begin{aligned} f(\alpha + \beta) &= \frac{2^{\alpha+\beta} + 2^{-(\alpha+\beta)}}{2} \\ f(\alpha)f(\beta) + g(\alpha)g(\beta) &= \left(\frac{2^\alpha + 2^{-\alpha}}{2}\right)\left(\frac{2^\beta + 2^{-\beta}}{2}\right) + \left(\frac{2^\alpha - 2^{-\alpha}}{2}\right)\left(\frac{2^\beta - 2^{-\beta}}{2}\right) \\ &= \frac{(2^\alpha 2^\beta + 2^\alpha 2^{-\beta} + 2^{-\alpha} 2^\beta + 2^{-\alpha} 2^{-\beta}) + (2^\alpha 2^\beta - 2^\alpha 2^{-\beta} - 2^{-\alpha} 2^\beta + 2^{-\alpha} 2^{-\beta})}{4} \\ &= \frac{2(2^\alpha 2^\beta + 2^{-\alpha} 2^{-\beta})}{4} = \frac{2^{\alpha+\beta} + 2^{-(\alpha+\beta)}}{2} \end{aligned}$$

左辺と右辺は一致することが分かります。