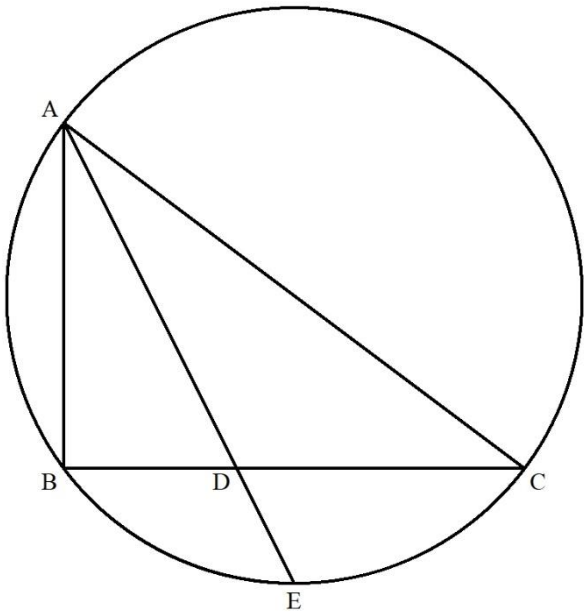
2021年度　大学共通テスト（1次日程）【数学Ⅰ・数学A】解説

第5問

次の図を見て、位置関係を確認しながら、解説を読んで下さい。

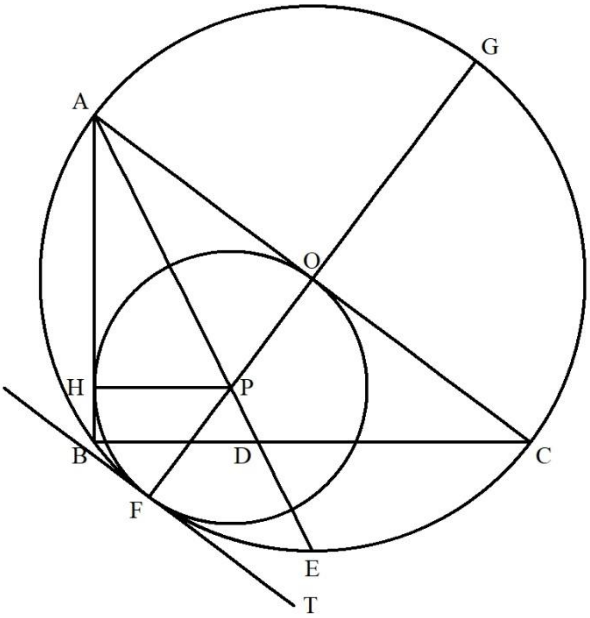


BDの長さは、角の二等分線の比の関係式から求めることができます。

ADの長さを求める問題。先に△ABCが∠ABC＝90°の直角三角形であることを認識しておく必要があります。3辺の比が整数になる直角三角形として3:4:5や5:12:13を覚えておきたいです。∠ABC＝∠ABD＝90°であることから、三平方の定理を適用して$AD^2 = AB^2 + BD^2$で求められます。

AEの長さを求める問題。円周角の定理より、∠ABC（∠ABD）＝∠AEC（∠CED）＝90°であることをまず見抜きましょう。更に対頂角から∠ADB＝∠CDE。2角が等しいので、△ABD∽△CED。相似な三角形の対応する辺の比は等しいことから、AD:BD＝CD:ED。先に$AD = \frac{3\sqrt{5}}{2}$、$BD = \frac{3}{2}$を得ており、$CD = BC - BD = 4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$と計算できるので、$\frac{3\sqrt{5}}{2} : \frac{3}{2} = \frac{5}{2} : ED$という比例式を解いて$ED = \frac{\sqrt{5}}{2}$を得ます。ここから、$AE = AD + ED = \frac{3\sqrt{5}}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} = 2\sqrt{5}$であることがわかります。

続いて、点Pに関する問題です。下図のような位置関係になります。



まずPがABとACに内接する円の中心であることから、Pが∠BACの二等分線上にあること、つまり直線AD上にあることを見抜くことが不可欠です。また、円Pと辺ABの接点は、後でHとおかれている点に他ならず、∠AHP＝90°です。∠ABD＝90°でもあることから、∠AHP＝∠ABD。共通な角から∠HAP＝∠BAD。よって△AHP∽△ABD。円Pの半径をrとおくとされているので、HP＝rです。相似な図形の対応する辺の比は等しく、AP：AD＝HP：BD。ここまでの結果を代入して、$AP:\frac{3\sqrt{5}}{2}=r:\frac{3}{2}$となるので、$AP=\sqrt{5}r$であることがわかります。

また、Fは円Oの接点なので、接線をT、外接円Oの中心をOとすると、T⊥OFです。更にFは円Pの接点でもあることからTは円Pの接線でもあり、T⊥PFです。つまり、O、P、Fは一直線上にあります。すると、直線FPは円Oの中心を通っているので、直線と円の2つの交点であるFGを結んだ線分は円Oの直径に等しいですが、∠ABC＝90°なので、円周角の定理から円Oの直径はACの長さに等しいため、FG＝5。更に、Fは円P上の点なのでFP＝r。よって、PG＝FG－FP＝5−rであることがわかります。

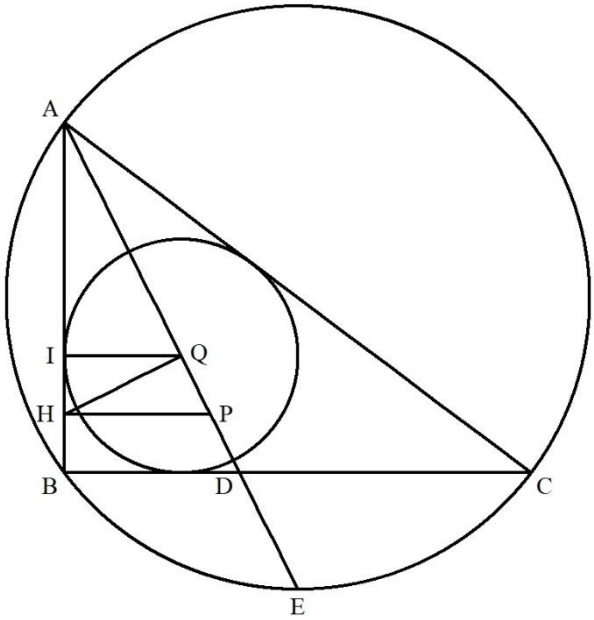
更に、$PE=AE-AP=2\sqrt{5}-\sqrt{5}r$となることにも注意します。

ここで、方べきの定理より、AP・PE＝FP・PGが成り立ちます。ここまでの段階で、これらは全てrを用いて表されていることに注意すると、

$$\sqrt{5}r\cdot\left(2\sqrt{5}-\sqrt{5}r\right)=r\cdot(5-r)$$

が成立するということになります。これをr≠0という条件の下で解いて、$r=\frac{5}{4}$を得ます。

続いて、点Qに関する問題についてです。



△ABC の半径をqとおくと、内接円の中心Qと接点を結ぶ線分が△ABC の各辺と垂直に交わることから、

$$\Delta ABC = \Delta ABQ + \Delta BCQ + \Delta CAQ = \frac{3q}{2} + \frac{4q}{2} + \frac{5q}{2} = 6q$$

と表せますが、∠BAC＝90°であることから、$\Delta ABC = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6$であることもわかります。従って、6q＝6となることから、q＝1とわかります。

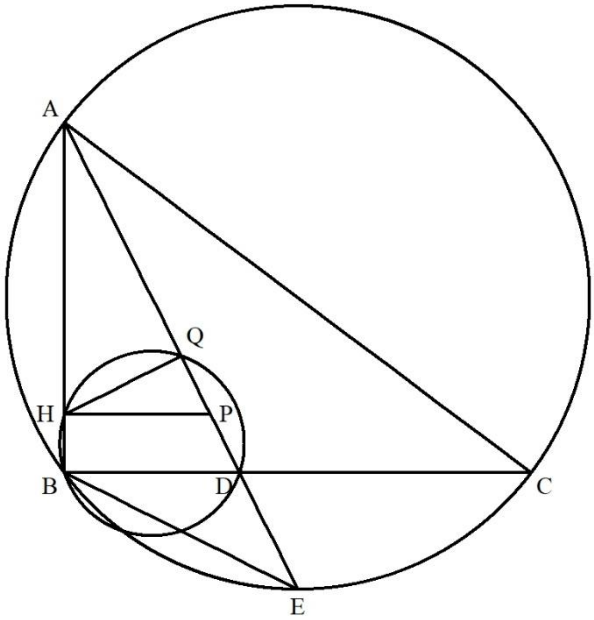
更に、QがABとACに内接する円の中心であることから、Qが∠BACの二等分線上にあること、つまり直線AD上にあることを見抜きましょう。円Qと辺ABの接点をIとおくと、∠AIQ＝90°になります。∠ABD＝90°でもあることから、∠AIQ＝∠ABD。共通な角から∠IAQ＝∠BAD。よって△AIQ∽△ABD。相似な図形の対応する辺の比は等しく、IQ：BD＝AQ：AD。IQは内接円の半径1に等しいことを考慮すると、ここまでの結果を代入して、$1 : \frac{3}{2} = AQ : \frac{3\sqrt{5}}{2}$となるので、$AQ = \sqrt{5}$であることがわかります。

また、△AHPは∠AHP＝90°の直角三角形なので、

$$AH = \sqrt{AP^2 - HP^2} = \sqrt{\left(\sqrt{5} \cdot \frac{5}{4}\right)^2 - \left(\frac{5}{4}\right)^2} = \frac{5}{2}$$

となります。

最後の問題についてです。



まず結論として、点B、D、Q、Hは同一円周上にあります。つまり、(a)は正です。以下で証明を行います。

$$HP:AP=\frac{5}{4}:\frac{5\sqrt{5}}{4}=1:\sqrt{5}$$

$$QP:HP=(AP-AQ):HP=\left(\frac{5\sqrt{5}}{4}-\sqrt{5}\right):\frac{5}{4}=\frac{\sqrt{5}}{4}:\frac{5}{4}=\sqrt{5}:5=1:\sqrt{5}$$

更に、共通な角なので∠HPQ＝∠APH。2組の辺の比が等しく、その間の角も等しいので、△HPQ∽△APH。相似な図形の対応する角は等しいため、∠HQP＝∠AHP＝90°です。共通な角なので∠HQP＝∠HQD＝90°であり、∠HBD＝90°でもあるため、結局∠HQD＝∠HBD＝90°となります。従って、∠HQD＋∠HBD＝180°。一組の対角の和が180°になるため、点B、D、Q、Hは同一円周上にあると言えます。

また、∠HBE＝∠HBD＋∠DBE＝90°＋∠DBE＞90°。∠HQD＝∠HQE＝90°であるため、∠HBE＋∠HQE＞180°。一組の対角の和が180°にならないため、点B、E、Q、Hは同一円周上にはありません。つまり、(b)は誤です。