

2021年度 大学共通テスト(1次日程)【数学Ⅰ・数学A】解説

第4問

反時計回りに点の番号が付されているので、反時計回りを l 個進むことを $+l$ 、時計回りに l 個進むことを $-l$ と表現して考えていくのがよいでしょう。更に、偶数の目が出る回数を x 回、奇数の目が出る回数を y 回と表すと、問題文で与えられている不定方程式の文字の用い方と同じになるので、考えやすくなります。

このようにすると、偶数が出たら1回でプラス方向に5個進むので、 x 回出ると $5x$ 進みます。奇数が出たら1回でマイナス方向に3個進むので、 y 回出ると $-3y$ 進みます。なので、両方合わせると $5x - 3y$ 進むことになります。

これが、第4問全体の基盤になります。

(1) 全部で5回投げるので、 $x + y = 5$ 。 P_1 に行くには $+1$ 進めばいいので、 $5x - 3y = 1$ 。この2式を連立させて、 x と y を求めるというのが素朴に浮かぶ考えです。

実際その通りに解けばこの問題の正解は出るのですが、この考え方は完全な正解とは言えません。なぜかという、点が円周上に配置されているため、 ± 15 進むと元に戻ってしてしまうからです。なので、 $5x - 3y = 1$ の代わりに $5x - 3y = 16$ や $5x - 3y = -14$ を用いても、原理的には良いことになります(但し、全部で5回という限定があるため、プラス方向に進める最大値は $5 \times 5 = 25$ 、マイナス方向に進める最大値は $-3 \times 5 = -15$ であるため、これ以外の可能性はありません)。

ただ、 $5x - 3y = 16$ や $5x - 3y = -14$ を使っても、 x や y は整数では求まりません。 x や y は目が出た回数なので、非負整数で求められなければ意味がなく、不適ということになります。そのため、 $x + y = 5$ と $5x - 3y = 1$ を連立させて得られる $x = 2$, $y = 3$ が唯一の正解ということになるわけです。

(2) 不定方程式の一般解を求める典型的な問題です。

$5 \cdot 2 - 3 \cdot 3 = 1$ が成り立つことが(1)の結果からわかるので、この両辺を8倍して、 $5 \cdot 2 \cdot 8 - 3 \cdot 3 \cdot 8 = 8$ が得られます。これと $5x - 3y = 8$ の辺々を引いて、整理すると、

$$5(x - 2 \cdot 8) = 3(y - 3 \cdot 8)$$

となります。3と5が互いに素であるため、 $x - 2 \cdot 8 = 3k$ とおくことができ、これを x について解くと、 $x = 2 \cdot 8 + 3k$ 。これを①に代入して y について解けば、 $y = 3 \cdot 8 + 5k$ が導かれます。

$0 \leq y < 5$ という制限は、先に求めた一般解を踏まえると $0 \leq 3 \cdot 8 + 5k < 5$ という制限を意味しており、これに k が整数という条件も考え併せると、 $k = -4$ が唯一該当

します。これを先程得た一般解に代入して、 $x = 4$, $y = 4$ が得られます。

ところで、(2)で設定した $5x - 3y = 8$ という式は、「偶数の目が x 回、奇数の目が y 回出た結果として、+8移動する」ことを表しているので、 $x = 4$, $y = 4$ がこの解だったということは、偶数が4回、奇数が4回の合計8回で、+8移動して P_8 に辿り着くことになります。

(3)偶数4回奇数4回の合計8回で P_8 に辿り着くわけですが、偶数1回で+5、奇数1回で-3進むので、ここに来るまでには、反時計回りに $4 \times 5 = 20$ 、時計回りに $4 \times 3 = 12$ 移動していることになります。

しかし、反時計回りであれ時計回りであれ、15進むと P_0 に戻ってしまうので、反時計回りに20進んだ結果は、 $20 - 15 = 5$ 進んだ結果と同じです。そのため、この分を少なくできます。偶数が3回出ると反時計回りに15進むため、偶数3回分を少なくして、偶数1回と同じ結果になります。

なお、時計回りには12しか進んでいないので、進んだ個数は非負でなければ意味がない以上、回数を少なくすることはできません。

偶数1回奇数4回の合計で P_8 に辿り着くことができます。

(4) P_t に辿り着く最小回数を考えていきましょう。

(2)で P_8 について考えたことを一般化すると、 $5x - 3y = t$ の一般解は、 P_t に辿り着く回数を表しています。(2)と同様に解いていけば、 $x = 2t + 3k$, $y = 3t + 5k$ となるので、偶数が $2t + 3k$ 回、奇数が $3t + 5k$ 回出れば、 P_t に辿り着きます。この条件の下で、 $x + y$ を最小化するというのが、素朴な考え方です。

しかし、ここで注意すべき点があります。

x や y は k の増加関数ですから、 k を小さくすればするほど x も y も小さくできます。しかし、回数は非負の整数で表されないと不適であるという制約が、 k の下限を与えます。

$x = 2t + 3k \geq 0$ 及び $y = 3t + 5k \geq 0$ を k について解くと、 $k \geq -\frac{2}{3}t$ 及び $k \geq -\frac{3}{5}t$ という制約があることがわかります。

もう一つ考えなければならないことは、(3)で $r=8$ の場合に考えたように、一周分節約できる可能性があることです。この点を反映させていく必要があります。

(2)では、最小ではない x を求めてしまいました。どうしてそうなったのでしょうか？それは、 x と y が同じ k で結び付けられているからです。(2)で導いた $k = -4$ という結果は、 $y \geq 0$ を用いて導いたため、 y を最小にすることはできていますが、 x の条件とは無関係です。 x の最小値を導く方法は、別に考えなければならないということです。

(3)で求めた x の最小値を導くには、どうすればよかったか？ $x = 2 \cdot 8 + 3k \geq 0$ を満たす最小の k を求めれば $k = -5$ となります。このとき $x = 2 \cdot 8 + 3 \cdot (-5) = 1$ となっ

て、(3)で求めた最小回数が直接求められたのです。

x と y で同じ k を用いる必要はないことがわかったので、 $x = 2t + 3k_x$ 、 $y = 3t + 5k_y$ のように分けて考えましょう。その上で、非負条件から $k_x \geq -\frac{2}{3}t$ 及び $k_y \geq -\frac{3}{5}t$ という制約を導きます。

この制約と k の整数条件を共に考慮して、 x や y の最小値がどのようになるかを調べた一覧表を、以下に示します。

t	Min k_x	Min x	Min k_y	Min y	Min ($x+y$)
1	0	$2*1+3*0=2$	0	$3*1+5*0=3$	$2+3=5$
2	-1	$2*2+3*(-1)=1$	-1	$3*2+5*(-1)=1$	$1+1=2$
3	-2	$2*3+3*(-2)=0$	-1	$3*3+5*(-1)=4$	$0+4=4$
4	-2	$2*4+3*(-2)=2$	-2	$3*4+5*(-2)=2$	$2+2=4$
5	-3	$2*5+3*(-3)=1$	-3	$3*5+5*(-3)=0$	$1+0=1$
6	-4	$2*6+3*(-4)=0$	-3	$3*6+5*(-3)=3$	$0+3=3$
7	-4	$2*7+3*(-4)=2$	-4	$3*7+5*(-4)=1$	$2+1=3$
8	-5	$2*8+3*(-5)=1$	-4	$3*8+5*(-4)=4$	$1+4=5$
9	-6	$2*9+3*(-6)=0$	-5	$3*9+5*(-5)=2$	$0+2=2$
10	-6	$2*10+3*(-6)=2$	-6	$3*10+5*(-6)=0$	$2+0=2$
11	-7	$2*11+3*(-7)=1$	-6	$3*11+5*(-6)=3$	$1+3=4$
12	-8	$2*12+3*(-8)=0$	-7	$3*12+5*(-7)=1$	$0+1=1$
13	-8	$2*13+3*(-8)=2$	-7	$3*13+5*(-7)=4$	$2+4=6$
14	-9	$2*14+3*(-9)=1$	-8	$3*14+5*(-8)=2$	$1+2=3$

表の右端に、 $x+y$ の最小回数を記してあります。これを見れば、最小回数は $t=13$ の場合の6回であることがわかります。

しかし、試験時間中にこれを全て調べるのは、結構たいへんです…(*_*;。問題の選択肢から、候補は t が10から14の範囲に限られているので、この範囲だけで調べるのが一つの道でしょう。

しかし、規則性が発見できた場合には、もっと早く解ける可能性も出てきます。

表をよく見てみると、Min x は2、1、0の繰り返し、Min y は3、1、4、2、0の繰り返しになっていることに気づけるかと思います。こうなることには理由があります。

$x = 2t + 3k_x$ と表されるわけですが、ここで $2t$ を3で割った商を Q_x 、余りを R_x とおいてみましょう。すると $2t = 3Q_x + R_x$ と表現できます。これを先の式に代入して整理すると、 $x = 3(k_x + Q_x) + R_x$ となります。 x が非負という条件を維持しつつ、 x を最小化

するため条件は $k_x + Q_x = 0$ です。 R_x とは余りなので3未満でしかあり得ないため、 $k_x + Q_x < 0$ だと x は負になってしまうからです。

実は x の最小回数を求める作業は、この R_x を求めることに他ならなかったのです。 x の非負性を維持しながら $3k_x$ を限りなく小さくするには、 $2t$ から3の正の倍数を取り除けるだけ取り除かなければならず、それは $2t$ を3で割った余りを求めることに他ならなかったというわけです。

ところで t が1、2、3、4、5、6…と繰り返していくと、3で割った余りは1、2、0、1、2、0…と3ごとに繰り返していくことを知っている人は多いかと思われます。これは t を2倍にしても成り立ちます。 p と q の余りが同じ数である場合、 p と q を整数倍しても余りは同じになるからです(これは、合同式の性質の一つです)。なので、 $2t$ を3で割った余りの $R_x = x$ の最小回数も、3ごとに繰り返していくのです。

y の場合も、同様のことが成り立ちます。 $y = 3t + 5k_y$ と表されるので、 $3t$ を5で割った商を Q_y 、余りを R_y とおくと、 $3t = 5Q_y + R_y$ と表現できるため、 $y = 5(k_y + Q_y) + R_y$ となり、 y の非負性を満たす y の最小化条件は $k_y + Q_y = 0$ で、 R_y が y の最小回数です。 t を5で割った余りが5ごとに繰り返されることと合同式の性質から、 $3t$ を5で割った余りも5ごとに繰り返していきます。

この特徴が見抜ければ、問題は素早く解ける！(>v<)

…と言われればそうなのですが、余程の数学の猛者でもない限り、試験時間中にこんなことを考えつく余裕はないかと思います…(*_*;。

普通の人には $t=10$ から14の範囲で、ベタに調べていくしかないような気がする問題です…