# 2021年度　大学共通テスト（1次日程）【数学Ⅰ・数学A】解説

## 第1問

〔1〕

（1）代入して得られた方程式の左辺を因数分解するだけ。たすき掛けができることが大切です。

（2）最初は、代入して得られた2次方程式を、解の公式を使って求めます。

次は、大きい方の解は$\alpha = \frac{-5+\sqrt{65}}{2}$になるので、$\frac{5}{\alpha} = \frac{5\cdot 2}{-5+\sqrt{65}}$の分母を有理化します。

最後は、$\frac{5}{\alpha} = \frac{5+\sqrt{65}}{2}$となるので、$8 < \sqrt{65} < 9$から$6.5 < \frac{5+\sqrt{65}}{2} < 7$を導くことで、$m = 6$とわかります。

（3）太郎と花子の会話による示唆を踏まえて、解の公式の根号の中が有理数の2乗になれば、①の解も有理数になることを見抜きましょう。

解の公式の根号の中とは、実は判別式のことに他なりません。

そこで判別式Dを計算すると、$D = -16c + 97$となります。これが有理数の2乗になればいいのですが、問題はcが正の整数になる個数を聞いています。そこで、まず判別式が正になる条件を$D = -16c + 97 > 0$を解いて導きましょう。すると、$c < 6.0625$となりますから、c が6以下の正の整数になる場合に、Dが有理数（cが整数のため、Dも整数でしかあり得ませんが）の2乗になるかどうかを確かめればよいのです。

候補は6個しかありませんから、全部調べてみればいいのです。すると以下のようになります。

| c | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| D | $81=9^2$ | 65 | $49=7^2$ | 32 | 17 | $1=1^2$ |

これで、D が整数の2乗になるようなcは、1と3と6の3個であることがわかります。

〔2〕

（1）sinA は cosA から、△ABC の面積は、三角比の面積公式を用いることで導くことができます。△AID の面積は、公式を用いると、$\triangle AID = \frac{1}{2}bc\sin\angle DAI$になるのですが、Aの周囲にできる四つの角の内、2つが正方形の内角であることに注意すると、$A + \angle DAI = 180°$となります。

ここに気づけるかどうかが、この〔2〕最大のポイントです。気づけないと、この先の（3）と（4）もどうにもならなくなります…(*_*;

その結果、$\sin\angle DAI = \sin(180° - A) = \sin A$になります。その結果、$\triangle AID = \frac{1}{2}bc\sin A$となって、△ABC の面積と同じ式になります。従って、免責の値も△ABC と同じです。

（2）三角形の三つの辺の長さの間に、

A が鋭角の場合：$a^2 < b^2 + c^2 \Leftrightarrow a^2 - b^2 - c^2 < 0$

A が直角の場合：$a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow a^2 - b^2 - c^2 = 0$

A が鈍角の場合：$a^2 > b^2 + c^2 \Leftrightarrow a^2 - b^2 - c^2 > 0$

であることを利用します。あとは、a・b・cのそれぞれの2乗が、正方形の面積 $S_1$・$S_2$・$S_3$に等しいことを見抜くのが、もう一つのポイントです。

（3）これを解けるかどうかは、（1）の最後の問題が解けるかどうかが大きく左右しています。$T_1 = \triangle AID = \frac{1}{2}bc\sin A = \triangle ABC$となることに気づいたら、同様の理屈で$T_2 = \triangle BEF = \frac{1}{2}ca\sin B = \triangle ABC$、$T_3 = \triangle CGH = \frac{1}{2}ab\sin C = \triangle ABC$となることにも気づいて欲しいです。従って常に、$T_1 = T_2 = T_3 = \triangle ABC$となるわけです。

（4）最初は、（1）でも用いた$A + \angle DAI = 180°$に注意すると、余弦定理から、

$$ID^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(180° - A) = b^2 + c^2 + 2bc\cos A$$

$$BC^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

であることがわかります。$0° < A < 90°$の範囲では$\cos A > 0$なので、$2bc\cos A > -2bc\cos A$になるため$ID^2 > BC^2$、従って$ID > BC$になります。

次は、外接円の半径をr、△ABC の外接円の半径Rとおいて、（1）でも用いた$\sin\angle DAI = \sin A$という関係に注意しつつ正弦定理を適用すると、$r = \frac{ID}{2\sin A}$及び$R = \frac{BC}{2\sin A}$であることがわかります。$0° < A < 180°$である以上は$\sin A > 0$なので、$ID > BC$から$r > R$が導かれます。

外接円の半径が最も小さい三角形を求める問題は、この延長線上にあります。同様の理屈で、$0° < B < 90°$の範囲では（△BEF の外接円の半径）＞（△ABC の外接円の半径）、$0° < C < 90°$の範囲では（△CGH の外接円の半径）＞（△ABC の外接円の半径）となるので、$0° < A < B < C < 90°$であれば、△ABC の外接円の半径は他

のどの三つよりも小さいため、最小です。

$0° < A < B < 90° < C$のときは、次のように考えます。まず、△AID 及び△BEF の外接円の半径と、△ABC の外接円の半径の関係は先程と変わっていないので、△ABC の方が小さくなります。考え直す必要があるのは、条件が変わる△CGH の外接円の半径との関係です。

ここで先程、$0° < A < 90°$のときに$ID > BC$を導きましたが、$90° < A < 180°$の場合にはどうなるかを考えてみましょう。この場合、$\cos A < 0$なので、

$$ID^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(180° - A) = b^2 + c^2 + 2bc\cos A$$

$$BC^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

であったことを踏まえると、$ID^2 < BC^2$つまり$ID < BC$になることがわかります。更に先程、$ID > BC$から$r > R$を導いた過程と同様に考えれば、$90° < A < 180°$の場合には$r < R$になることがわかります。これ自体は△AID と△ABC の関係についての話ですが、△CGH と△ABC の関係の場合も、A を C に置き換えることで、同様に考えることができます。つまり、$90° < C < 180°$であれば、（△CGH の外接円の半径）＜（△ABC の外接円の半径）となります。よって、△ABC の外接円の半径は△AID や△BEF の外接円の半径よりは小さかったので、最小は△CGH の外接円の半径です。